

Ecuaciones Diferenciales II Examen VIII

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Ecuaciones Diferenciales II Examen VIII

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Granada, 2026

Asignatura Ecuaciones Diferenciales II.

Curso Académico 2021/2022.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Segunda prueba de clase.

Fecha 6 de Junio de 2022.

Ejercicio 1. Dado un campo vectorial continuo $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, se supone que $x(t)$ es una solución maximal del problema

$$x' = X(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

con intervalo maximal $] \alpha, \omega[$. Se define la función

$$y(t) = x(-t), \quad t \in]-\omega, -\alpha[.$$

Encuentra un campo continuo $Y : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ de manera que $y(t)$ sea solución de

$$y' = Y(t, y), \quad y(-t_0) = x_0.$$

¿Es $y(t)$ solución maximal? Justifica la respuesta.

Ejercicio 2. Para cada $n \geq 1$ la función $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y cumple

$$f_n(t) = \frac{1}{n} + e^t \int_0^t f_n(s) ds.$$

Demuestra que la sucesión $\{f_n\}$ es uniformemente acotada.

Ejercicio 3. La solución del problema de Cauchy

$$x' = x + tx^3, \quad x(0) = x_0$$

se denota por $x(t; x_0)$. Prueba que $x(t; x_0)$ está bien definido en $t \in [-1, 1]$ cuando $|x_0|$ es suficientemente pequeño. Prueba que, para cada $t \in [-1, 1]$, se cumple

$$x(t; x_0) = x_0 e^t + o(|x_0|) \quad \text{si } x_0 \rightarrow 0.$$

Ejercicio 4. Se usa la norma Euclídea en $\mathbb{R}^3$ y se supone que $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo continuo que cumple

$$\langle X(t, x), x \rangle \leq -2 \quad \text{si } \|x\| = 3.$$

Se supone que $x(t)$ es una solución maximal del problema $x' = X(t, x)$, $x(0) = 0$. Demuestra:

a) $\|x(t)\| < 3$ para todo $t \in [0, \omega[$

b) $\omega = +\infty$.

Ejercicio 5. La función $F : [-1, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto F(t, x)$ es continua y cumple la condición

$$|F(t, x_1) - F(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad \forall (t, x) \in [-1, 1] \times \mathbb{R},$$

con $L < \frac{1}{2}$. Para cada $n = 1, 2, \dots$ se supone que $x_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua que cumple

$$x_n(t) = \frac{1}{n} + \int_{-t}^t F(s, x_n(s)) ds.$$

Demuestra que la sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1}$ converge uniformemente en $[-1, 1]$.